**Решения заданий муниципального этапа**

**Всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2024-2025 учебный год, 7 класс**

Решение

7.1. Книги девятитомника оказались расставлены на полке в следующем порядке: 1; 5; 9; 2; 7 ; 3 ; 6; 8; 4. Требуется расставить их по порядку номеров посредством трёх перестановок, если при каждой перестановке разрешается брать два рядом стоящих тома и в том же порядке ставить их на любое новое место.

**Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 - итоговая расстановка.**

**Решение. Книги будут расставлены по порядку номеров в результате следующих перестановок:**

**1; 5; 9; 2; 7; 3; 6; 8; 4 – первоначальное положение;**

**1; 2; 7; 3; 6; 8; 4; 5; 9 – после первой перестановки;**

**1; 2; 3; 6; 7; 8; 4; 5; 9 – после второй перестановки;**

**1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 – после третьей перестановки.**

7.2. Подряд выписали все натуральные числа от 1 до 2024 без пробелов. Какая цифра стоит в записи полученного числа на 2025-ом месте?

**Ответ: 1**

**Решение. Чтобы определить, какая цифра стоит на 2025-м месте, давайте рассмотрим структуру этой последовательности. Первые 9 мест займут однозначные числа (1-9), следующие 90 мест – двузначные числа (10-99), затем 900 мест – трехзначные числа (100-999), и так далее. Для нахождения цифры на 2025-м месте, давайте разделим 2024 на количество цифр в числах разных разрядов: Однозначные числа: 9 мест. Двузначные числа: 90 \* 2 = 180 мест. Трехзначные числа: 900 \* 3 = 2700 м, 2025 место находится в записи последовательности трёхзначных чисел. Остаётся найти это число. Каждые три цифры в этой записи составляют трёхзначное число. Всего таких чисел (2025 -189):3=612. Первое трёхзначное -100, второе – 101, 612-ое 100+611=711. Таким образом, последняя цифра этого числа и занимает 2025-ое место. То есть, число 1.**

7.3. Разделите данную фигуру на 6 равных частей по форме и по площади, делая разрезы только по линиям сетки, двумя различными способами.

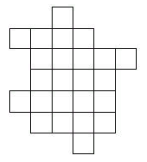


Рис. 1.

**Ответ: см. рис. 2.**

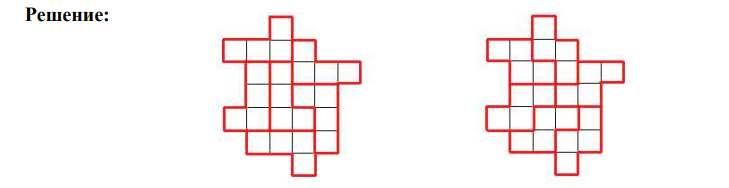


Рис. 2.

* 1. В вершинах куба записаны числа 4; 2; 0; 3; 1; 9; 5; 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах?

**Ответ: Получить нули во всех вершинах нельзя.**

**Решение. Сумма всех чисел первоначально была равна 31 (4 +2 +0 + 3 +1 +9 +5 +7 = 31). При прибавлении двух одинаковых чисел чётность суммы не изменится. А так как сумма шести нулей равна нулю – число чётное, то получить нули во всех вершинах куба нельзя.**

* 1. В мешке лежат карточки с четырьмя буквами С, Т, О, Н, по одной букве на карточке. Общее количество карточек 26. Известно, что карточек с буквой Т меньше, чем с буквой О, а карточек с буквой О меньше, чем с буквой Н. Из мешка не глядя извлекают несколько карточек и из букв на извлечённых карточках составляют слова. Чтобы гарантированно можно было собрать слово «СТОН», нужно вытащить минимум 22 карточки; чтобы слово «ТОН» — 21 карточку, а чтобы слово «ОН» — 20 карточек. Сколько карточек каждого вида в мешке? Ответ обоснуйте.

**Ответ: 5 букв С, 6 букв Т, 7 букв O и 8 букв Н.**

**Решение:**

**Способ 1. По условию существует такой набор из 21 карточки, из букв которого слово «СТОН» собрать нельзя. Но слово «ТОН» из букв этого набора собрать можно, значит, в этом наборе отсутствует буква «С». Так как при добавлении к набору её одной любой карточки получится набор, из которого слово «СТОН» уже собирается, все остальные 26 − 21 карточка содержат букву «С». Итак, карточек с буквой «С» ровно 5. Аналогично, из информации про слова «ТОН» и «ОН» находим, что карточек с буквой «T» ровно 6. На остальные буквы приходятся 26−5−6 = 15 карточек, при этом карточек с каждой из букв «О» и «Н» больше 6. Значит, одна из этих двух букв встречается 7 раз, вторая — 8. Так как карточек с буквой «О» меньше, чем с буквой «Н», получаем единственный ответ.**

**Способ 2. Так как при извлечении 22 букв слово «СТОН» получается обязательно, то каждая буква встречается более 26 − 22 = 4 раз. Так как можно извлечь 21 карточку так, что слово «СТОН» не соберётся, какой-то из букв не больше 26−21 = 5. Это не может быть буква Н, О или Т, так как иначе может случится, что вытащив 21 карточку мы не соберём слово ТОН. Итак, в наборе ровно 5 букв С. Аналогично рассуждая, находим, что буквы Н, О и Т встречаются не менее 6 раз каждая; при этом одна из них ровно 6 раз. И это не буквы О и Н (иначе может оказаться, что на вытащенных 20 карточках одной из них не будет; не сложится набор ОН. Значит, в наборе ровно 6 букв Т. Букв О и Н в сумме 15, значит, букв О меньше половины от этого числа, то есть не более 7. Но их больше, чем букв Т, то есть больше 6. Значит, в наборе 7 букв О и 8 букв Н.**

**Решения заданий муниципального этапа**

**Всероссийской олимпиады школьников по математике**

* 1. **учебный год, 8 класс**

8.1. Сколько раз встречается число 24 в записи числа 12345678910111213……2024, состоящей из упорядоченного ряда натуральных чисел от 1 до 2024 ?

**Ответ: 52 раза**

**Решение. В каждой сотне число, оканчивающееся на 24, встречается 1 раз. Таких чисел 21(20 сотен и число 2024). Если число 24 используется на позиции записи сотен и десятков, то всего таких чисел 20 (240, 241, …… 249, 1240, 1241, …… 1249). Если в последовательности натуральных чисел одно число оканчивается на 2, а другое начинается на 4, то таких чисел 11: 42, 43 и 402,403; 412, 413; …….. 492, 493. Таким образом, всего число 24 в записи встречается 52 раза.**

8.2. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в ее концах. Сумма этих произведений равна 143. Найдите сумму чисел в вершинах.

**Ответ: 24.**

**Решение: Пусть в вершинах квадрата были записаны числа a, b, c, d. Тогда возле сторон были записаны числа ab, bc, cd и da. Их сумма равна 𝑎𝑏 + 𝑏𝑐 + 𝑐𝑑 + 𝑑𝑎 = (𝑎 + 𝑐)(𝑏 + 𝑑) = 143. Разложим 143 на множители: 143 = 13 ∙ 11 = 143 ∙ 1. Других разложений нет, так как 13 и 11 – простые числа. Вариант 143 ∙ 1 не подходит, так как сумма натуральных чисел не может равняться 1. Значит, 𝑎 + 𝑐 = 13, 𝑏 + 𝑑 = 11 или наоборот. В обоих случаях 𝑎 + 𝑏 + 𝑐 + 𝑑 = 13 + 11 = 24.**

**Комментарий: Дан только ответ – 1 балл. Если не рассмотрен вариант 143 ∙ 1 – не более 5 баллов.**

8.3. Докажите, что число 3n4 + 14 может быть представлено в виде суммы квадратов трёх различных целых чисел? Ответ обоснуйте.

**Решение: Выполним равносильные преобразования: 3n 4 + 14 = (n 4 + 1) + (n 4 + 4) + (n 4 + 9) = = (n 4 + 2n 2 + 1) − 2n 2 + (n 4 + 4n 2 + 4) − 4n 2 + (n 4 − 6n 2 + 9) + 6n 2 = = (n 2 + 1)2 + (n 2 + 2)2 + (n 2 − 3)2 . Остаётся заметить, что числа n 2 + 1, n 2 + 2 и n 2 − 3 — целые и различные.**

8.4. ABCD – квадрат. Треугольники AMD и AKB оба равносторонние (см. рис. 1). Лежат ли точки C, K и M на одной прямой?

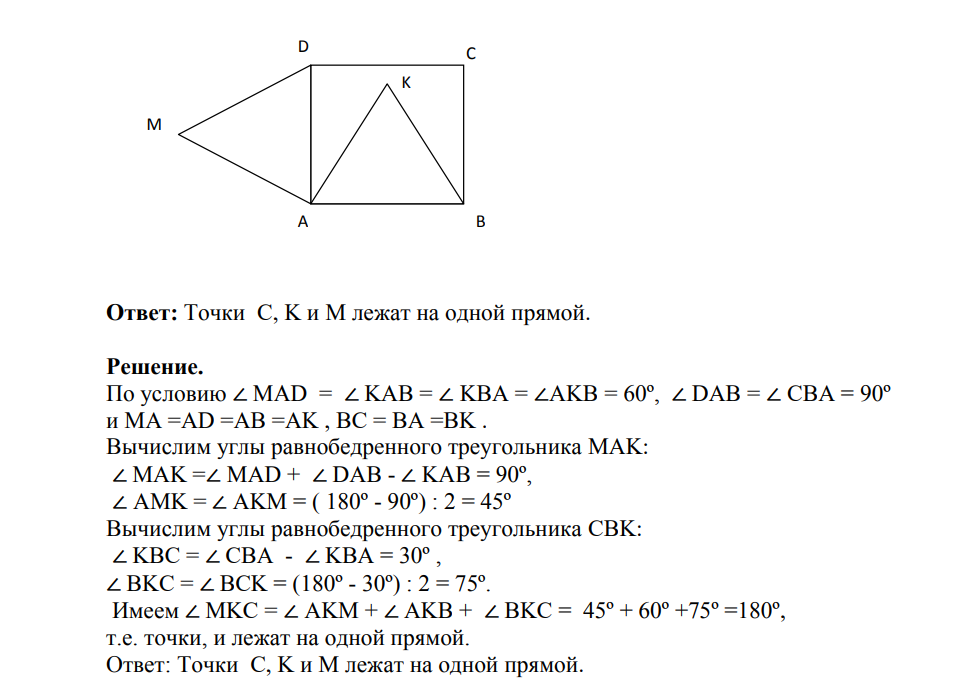


Рис. 1.

**Ответ: Точки C, K и M лежат на одной прямой.**

**Решение. По условию <МАD = <KAB = <KBA =< AKB = 60º, <DAB = <CBA = 90º и MA =AD =AB =AK , BC = BA =BK . Вычислим углы равнобедренного треугольника MAK: <MAK = <MAD + <DAB - <KAB = 90º, <AMK = <AKM = ( 180º - 90º) : 2 = 45º Вычислим углы равнобедренного треугольника CBK: <KBC = <CBA - <KBA = 30º , <BKC = <BCK = (180º - 30º) : 2 = 75º. Имеем <MKC = <AKM + <AKB +< BKC = 45º + 60º +75º =180º, т.е. точки лежат на одной прямой.**

8.5. Света, Даша и Маша играли в теннис «на высадку», то есть в каждой партии двое играют, а третий ждет и в следующей партии заменяет проигравшего (ничьих в теннисе не бывает). В итоге оказалось, что Света сыграла 12 партий, а Даша - 25 партий. Сколько партий Даша отдыхала?

**Ответ: ни одной.**

**Решение: Так как Даша играла со Светой не больше 12 раз, с Машей она играла не меньше 13 раз. С другой стороны, Даша с Машей не могли играть 2 раза подряд, их партии чередовались с одной или несколькими подряд партиями Светы. Значит, партий Даши с Машей не больше 13 (иначе промежутков, а значит, и партий Светы больше 12). Поэтому партий Даши с Машей ровно 13, а со Светой 25 – 13 = 12. Значит, Света с Машей не играли ни одной партии, то есть Даша не отдыхала.**