**Решения заданий муниципального этапа**

**Всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2024-2025 учебный год, 11 КЛАСС**

**Максимальное количество 35 баллов**

11.1. Докажите, что 𝑏2 > 4𝑎𝑐, если (𝑎 + 𝑏 + 𝑐)(𝑎 − 𝑏 + 𝑐) < 0.

**Доказательство:**

**Первое решение. Если 𝑎 = 0 и 𝑏 = 0, то условие имеет вид 𝑐2 < 0, что не верно. Следовательно, если 𝑎 = 0, тo 𝑏 ≠ 0 и требуемое неравенство выполняется. Пусть 𝑎 ≠ 0. Рассмотрим квадратичную функцию 𝑦 = 𝑎𝑥2 + 𝑏𝑥 + 𝑐. Поскольку 𝑦(1) = 𝑎 + 𝑏 + 𝑐, a 𝑦(−1) = 𝑎 − 𝑏 + 𝑐, и, по условию, 𝑦(1) · 𝑦(−1) < 0, то в точках +1 и -1 функция принимает значения разного знака и отлична от нуля. Это означает, что квадратичная функция имеет два корня, необходимым и достаточным условием которого является положительность дискриминанта, то есть 𝑏2 − 4𝑎𝑐 > 0, откуда и следует требуемое неравенство.**

**Второе решение. Из условия имеем (𝑎 + 𝑏 + 𝑐)(𝑎 − 𝑏 + 𝑐) = ((𝑎 + 𝑐) + 𝑏)((𝑎 + 𝑐) − 𝑏) = (𝑎 + 𝑐)2 − 𝑏2 = 𝑎2 + 2𝑎𝑐 + 𝑐2 − 𝑏2 < 0. Или 𝑏2 > 𝑎2 + 𝑐2 + 2𝑎𝑐. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом 𝑎2 + 𝑐2 ≥ 2𝑎𝑐, откуда 𝑏2 > 𝑎2 + 𝑐2 + 2𝑎𝑐 > 2𝑎𝑐 + 2𝑎𝑐 = 4𝑎𝑐.**

11.2. Чемпионат лагеря по футболу проводился по круговой системе (каждый играл с каждым. За победу в матче давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение - 0. Ecли две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных очков. Чемпион набрал 7 очков, второй призер — пять, третий – 3 очка. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

**Ответ: 2 очка**

**Решение. Пусть в чемпионате лагеря участвовало n команд. Тогда было сыграно всего матчей. В каждом матче разыгрывается 2 очка, значит, всего было разыграно очков. На долю трёх призёров приходится 15 очков, тогда на долю всех остальных участников . Каждая из остальных команд, не ставших призёрами, не может набрать более трёх очков. Поэтому , (n-2)2 ≤ 10, n≤5.**

**Если бы в чемпионате участвовало 3 или 4 команды, то они набрали бы в сумме меньше 15 очков. Поэтому в чемпионате участвовало 5 команд, которые в сумме набрали 20 очков. На долю двух последних приходится 5 очков, значит одна из них набрала 3 очка, а другая - 2 очка (при варианте 4 и 1 меняется состав призёров)**

11.3. Имеется 11 таких натуральных чисел, что суммы любых двух из них попарно различны. Докажите, что разность каких-то двух их них больше 27.

**Доказательство: Предположим противное. Тогда разность между наименьшим и наибольшим числом не больше 27. Обозначим наименьшее из 11-и данных чисел через n. Значит, каждое из этих чисел находится на отрезке [n; n + 27], причём число n + 27 может и не достигаться. Заметим, что все 11 чисел попарно различны, поскольку в противном случае среди попарных сумм будут и одинаковые, что противоречит условию задачи. Наименьшая возможная сумма пары чисел из набора равна n + (n + 1) = 2n + 1 а наибольшая сумма не превосходит числа (n + 27) + (n + 26) = 2n + 53. Всего различных сумм, таким образом, будет не более 2n + 53 − 2n = 53. Но, с другой стороны, различных пар в наборе ровно 11 · 10: 2 = 55. Значит, по принципу Дирихле среди них есть по крайней мере две с одинаковой суммой. Противоречие с условием задачи.**

11.4. Медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найдите углы треугольника.

**Ответ: 22,5º, 67,5º и 90º .**

**Решение. Пусть в треугольнике *ABC* высота *BH*, биссектриса *BK* и медиана *BM* делят угол *B* на четыре равные части, по *xº* каждый. Пусть *S* – середина *AB*. По свойству медианы прямоугольного треугольника, угол *SHB* также равен *xº*. *SM* – средняя линия, она параллельна *BC*, и, значит, угол *SMB* также равен *xº*. Из равенства углов *SMB* и *SHB* следует, что точки *S, H, M* и *B* лежат на одной окружности. Но угол *BHM* – прямой; значит, прямым будет и угол *BSM* (а, значит, и угол *B*). Итого, *4x=90*, *x=22,5; A=90*–*22,5=67,5*.**

**Критерии: за правильный необоснованный ответ – 1 балл.**

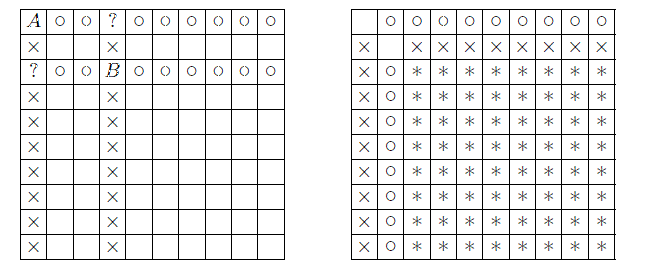
**Замечание. Возможны и другие решения – как геометрические, так и алгебраические. Однако решение типа «для треугольника с такими углами это верно – значит, углы – такие», при отсутствии полного обоснования, решение оценивается в 1 балл.**

11.5. В некоторых клетках таблицы 10x10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

**Ответ: 98.**

### **Решение. Пусть мы заполнили таблицу согласно условию, а клетка *A*свободна. Так как при постановке в нее любого значка должна получаться линия из одинаковых значков, то существует линия, содержащая ее, в которой все остальные клетки заполнены крестиками, и то же самое верно для ноликов (эти линии должны быть, естественно, строкой и столбцом). В частности, все свободные клетки стоят в разных строках и столбцах.**

### **Предположим, что пустых клеток больше двух. Тогда для двух из них (скажем, для A и B) направления линии крестиков совпадают (то есть либо для обеих крестики стоят в их горизонталях, либо для обеих — в вертикалях) (см. рис.). Пусть крестики стоят в их столбцах, а нолики — в их строках; тогда в пересечении строки, содержащей *A*, со столбцом, содержащим B, должен стоять и крестик, и нолик (ибо это пересечение непусто); противоречие. Значит, пустых клеток не больше двух. Пример с двумя пустыми клетками приведен на рис. (вместо звездочек могут стоять любые значки).**



**Критерии: Приведена оценка без примера – 4 балла, построен пример без оценки - 3 балла.**